

ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY

2014/2015-ÖS TANÉV

Haladók – II. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. Adott az alábbi két egyenletrendszer:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{I.} & a(x-1) + 2y = 1, \\ \text{II.} & b(x-1) + cy = 3; \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} \text{I.} & a(x-1) + 2y = 1, \\ \text{II.} & b|x-1| + cy = 3. \end{cases}$$

Tudjuk, hogy az első egyenletrendszernek nincs megoldása, a második egyenletrendszert viszont kielégíti a $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$ számpár. Határozza meg az a , b , c paraméterek értékét!

2. Hányféle módon lehet felmenni egy 25 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha mindig csak 2-t vagy 3-at lépünk? (Más esetnek tekintjük azt, ha az alján lépünk 3-at, utána mindig 2-t, vagy az elejétől kettesével lépünk és a végén 3-at.)

3. Jelöljön x , y , z olyan pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $2xy^2 = 3z^3$. Mennyi az xyz szorzat minimuma?

4. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának A -hoz közelebbi harmadoló pontja H , BC oldalának felezőpontja F , és DA oldalának A -hoz legközelebb levő negyedelő pontja G . Bizonyítandó, hogy FG , CH és DB egy ponton mennek át!

5. Két szám szorzata $a \cdot b = -1$. Ugyanezen két szám összege $a + b = 1$. Bizonyítsd be, hogy az $S = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + a^4 + b^4 + \dots + a^8 + b^8$ kifejezés egy egész szám, és add meg a pontos értékét!