21. Térelemek távolsága és szöge. Térbeli alakzatok. Felszín és térfogatszámítás.

Térelemek:

A pont, az egyenes és a sík fogalmát nem definiáljuk, alapfogalomnak tekintjük.

Térelemek kölcsönös helyzete

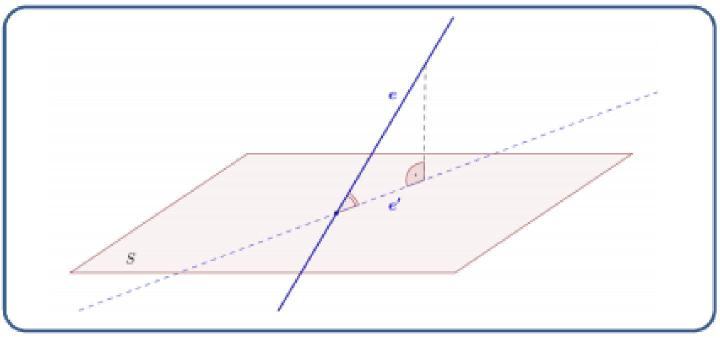
- Két egyenes metsző, ha egy közös pontjuk van.
- Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk.
- Két egyenes kitérő, ha nincsenek egy síkban.
- Egy egyenes illeszkedik egy síkra, ha minden pontja a síkon van.
- Egy egyenes metsz egy síkot, ha egy közös pontjuk van.
- Egy egyenes párhuzamos a síkkal, ha nincs közös pontjuk.
- Két sík metszi egymást, ha a két síknak van közös pontja. Ekkor a közös pontok egy egyenesre, a két sík metszésvonalára illeszkednek.
- Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.

Síkra merőleges egyenes tétele:

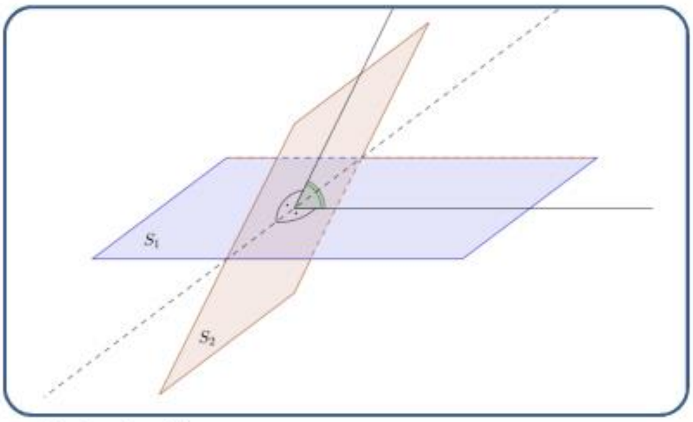
Ha egy egyenes merőleges egy sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor merőleges a sík minden egyenesére.

Térelemek hajlásszöge

- Két metsző egyenes hajlásszöge a két egyenes által meghatározott két-két egyenlő szög közül a nem nagyobbik. Két párhuzamos egyenes szöge 0°.
- Két kitérő egyenes szögét a tér egy tetszőleges pontján át az egyenesekkel húzott párhuzamosok szögével határozzuk meg.
- Egy egyenes merőleges egy síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére. A **síkra merőleges egyenes tétele** alapján elegendő belátni, hogy az egyenes a sík két nem párhuzamos egyenesére merőleges.
- Ha egy egyenes metsz egy síkot, de nem merőleges rá, akkor az egyenest a síkra merőlegesen vetítve egy egyenest kapunk. Az egyenes és a sík hajlásszöge az egyenesnek a merőleges vetületével alkotott szöge.



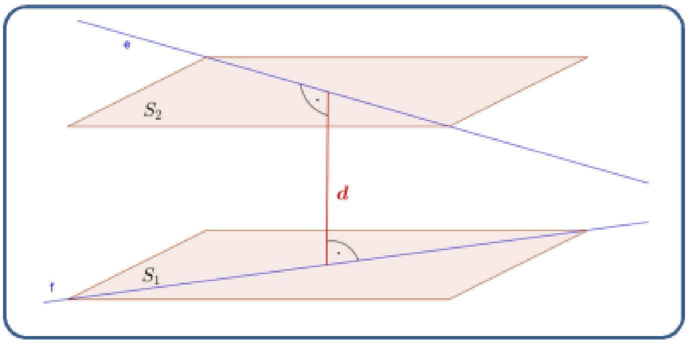
- Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor az egyenes és a sík szöge 0°.
- Két metsző sík hajlásszögének meghatározása: A két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontjában merőlegest állítunk a metszésvonalra mindkét síkban. Ennek a két egyenesnek a szögét nevezzük a két sík szögének.



- Párhuzamos síkok szöge 0°.

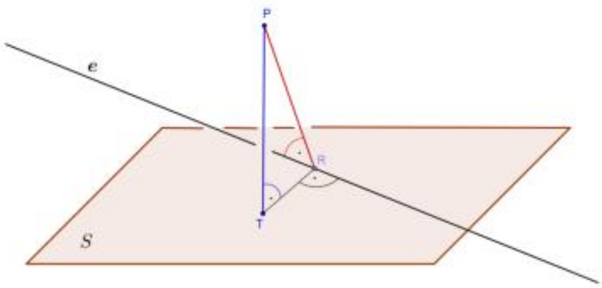
Térelemek távolsága

- Két pont távolsága a pontokat összekötő szakasz hossza.
- Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza.
- Pont és sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza.
- Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes egyik pontjának a másik egyenestől mért távolsága.
- Párhuzamos egyenes és sík távolsága az egyenes egyik pontjának a síktól mért távolsága.
- Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík egyik pontjának a másik síktól mért távolsága.
- Két kitérő egyeneshez egyértelműen létezik két párhuzamos sík, amelyekre az egyik illetve a másik egyenes illeszkedik. A két kitérő egyenes távolsága ennek a két párhuzamos síknak a távolságával egyenlő. Megmutatható, hogy van olyan szakasz, amely összeköti a két kitérő egyenest és mindkettőre merőleges. Ezt a két kitérő egyenes normáltranszverzálisának nevezzük, ennek a hossza egyenlő a két egyenes távolságával.



Három egymásra merőleges egyenes tétele

Ha egy P pontból merőlegest állítunk a P pontot nem tartalmazó S síkra és a sík egy e egyenesére, akkor a két talppontot összekötő egyenes merőleges az e egyenesre.



Síkidomok vetületének területe

Az S síkban lévő sokszöget merőlegesen vetítjük az S_1 síkra. Ha a két sík által bezárt szög α, a sokszög területe T , akkor a vetület területe $T' = T \cdot \cos\alpha$.

Nevezetes ponthalmazok a térben:

- Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak egy gömbfelület.
- Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek egy adott egyenestől adott távolságra vannak egy hengerfelület.
- Két adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben a szakasz felezőmerőleges síkja.

Euler-féle poliédertétel

Ha egy konvex poliéder csúcsainak a számát c-vel, éleinek a számát e-vel, lapjainak a számát l-lel jelöljük, akkor

$$c + l = e + 2.$$

(Ez az összefüggés a poliéderek tágabb körére, az egyszerű poliéderekre is igaz. Egy poliédert egyszerűnek nevezünk, ha „gömbbé fújható fel.")

Euler-féle poliédertétel

Ha egy konvex poliéder csúcsainak a számát c-vel, éleinek a számát e-vel, lapjainak a számát l-lel jelöljük, akkor

$$c + l = e + 2.$$

(Ez az összefüggés a poliéderek tágabb körére, az egyszerű poliéderekre is igaz. Egy poliédert egyszerűnek nevezünk, ha „gömbbé fújható fel.")

Szabályos poliéderek

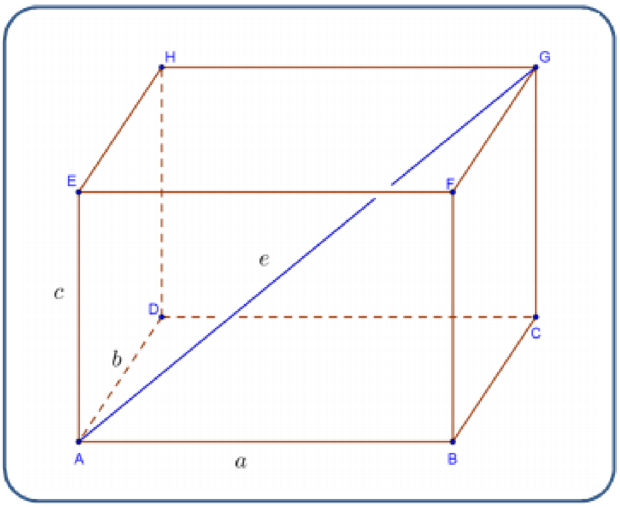
Szabályos poliédereknek nevezzük azokat a konvex poliédereket, amelyeknek élei egyenlők, élszögei egyenlők és lapszögei is egyenlők.

A definícióból következik, hogy a szabályos poliéderek lapjai szabályos sokszögek. Ötféle szabályos poliéder létezik: a szabályos tetraéder, a kocka, az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder.

Térbeli Pitagorasz-tétel

Ha egy téglatest egymásra páronként merőleges éleinek a hossza a, b, c , akkor az e testátló hosszára teljesül:

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



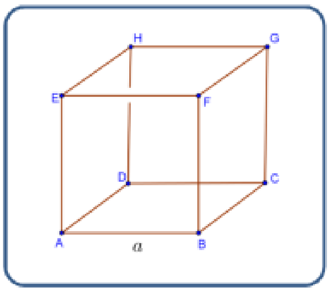
Testek felszíne, térfogata

A felszínt A-val, a térfogatot V-vel jelöljük.

- **kocka**

$$A = 6 \cdot a^2$$

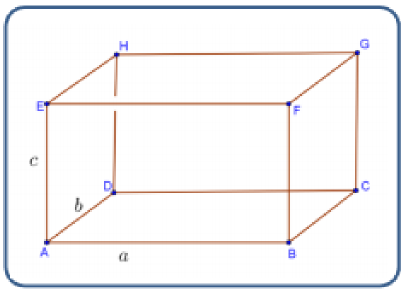
$$V = a^3$$



- **téglatest**

$$A = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$

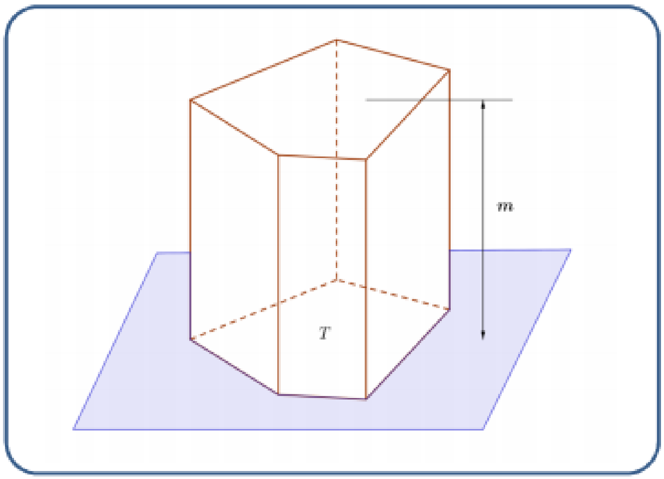


- **egyenes hasáb**

Az alaplap területe T,
az alaplap kerülete k,
a magasság m.

$$A = 2T + km$$

$$V = Tm$$

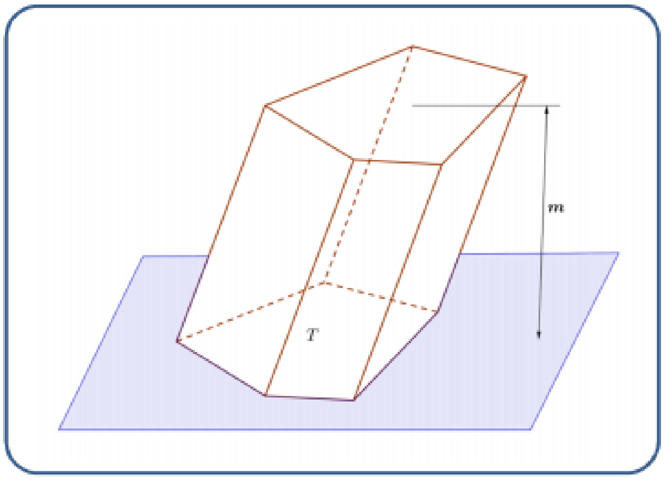


- **ferde hasáb**

Az alaplap területe T,
a magasság m,
az oldallapok területének összege, a palást P.

$$A = 2T + P$$

$$V = Tm$$

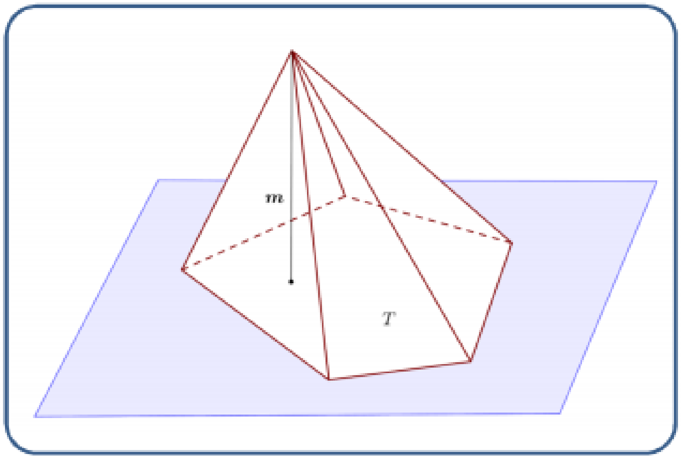


- **gúla**

Az alaplap területe T,
a magasság m,
az oldallapok területének összege, a palást P.

$$A = T + P$$

$$V = \frac{Tm}{3}$$

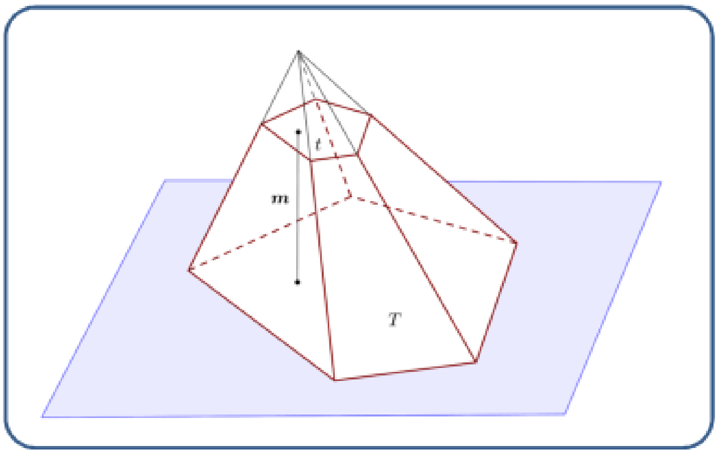


- **csonkagúla**

  Az alaplap területe T,
  a fedőlap területe t,
  a magasság m,
  az oldallapok területének összege, a palást P.

  $$A = T + t + P$$

  $$V = \frac{m(T + \sqrt{Tt} + t)}{3}$$

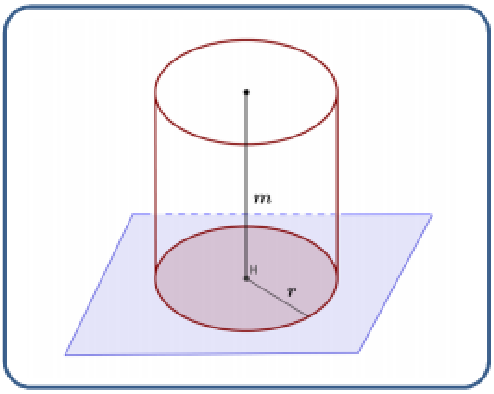


- **egyenes körhenger**

  Az alapkör sugara r,
  a magasság m.

  $$A = 2\pi r(r + m)$$

  $$V = r^2\pi m$$

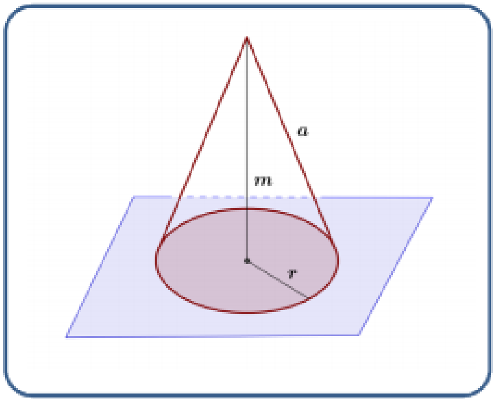


- **egyenes kúp**

  Az alapkör sugara r,
  a magasság m,
  az alkotó a.

  $$A = \pi r(r + a)$$

  $$V = \frac{\pi r^2 m}{3}$$

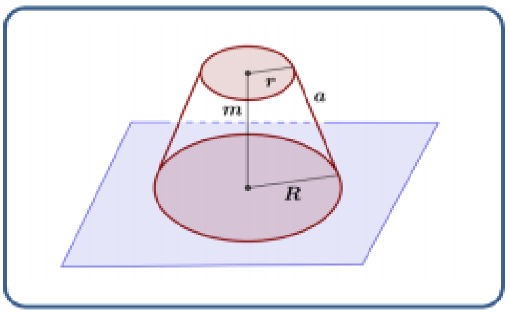


- **csonkakúp**

  Az alapkör sugara R,
  a fedőlap sugara r,
  az alkotó a, a magasság m.

  $$A = \pi[R^2 + r^2 + a(R + r)]$$

  $$V = \frac{\pi m}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

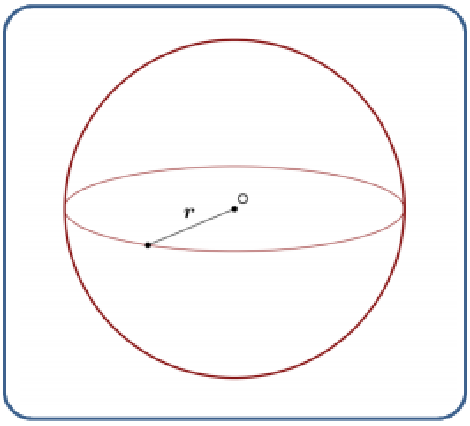


- **gömb**

Sugár: r.

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$



A gömb térfogata

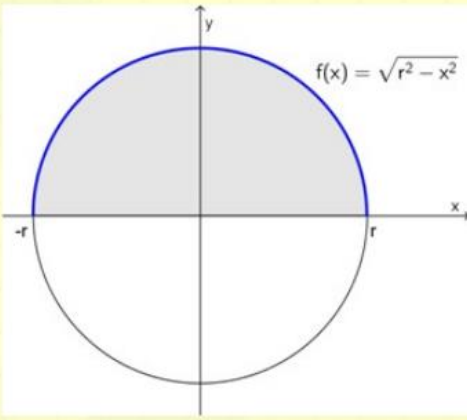
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, \mathrm{d}x$$

$$V = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-r}^{r}$$

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$



Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi. Egybevágó alakzatok megfelelő szakaszai, szögei egyenlők.

Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi. Hasonló alakzatok megfelelő szögei egyenlők és a megfelelő szakaszok aránya egyenlő.

Tétel:

- Hasonló testek felszínének aránya egyenlő a hasonlóság arányának a négyzetével.
- Hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának a köbével.

Forrás: https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/21.pdf

https://slideplayer.hu/slide/2603882/