

ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY
2012/2013-AS TANÉV

Haladók – II. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. A „23-as szám” című misztikus filmben az egyik szereplő a házsámukat nagyon különlegesnek találja. A ház száma 1814, és az alábbi misztikus tulajdonságokat fedezi fel benne:

- (1) ha az első két számjegyre hozzáadjuk a második kettőből képzett kétjegyű számot, akkor $1 + 8 + 14 = 23$ -at kapunk;
- (2) ha az első két számjegyből képzett kétjegyű számhoz hozzáadjuk a másik két számjegyet, akkor $18 + 1 + 4 = 23$ -at kapunk ismét;
- (3) ha a két kétjegyű számot adjuk össze, akkor $18 + 14 = 32$ -öt kapunk, ami épp a 23 fordított sorrendben leírva.

Tényleg különleges ebből a szempontból az 1814? Vagyis hány olyan négyjegyű szám van, amelyik rendelkezik a fenti három tulajdonság mindegyikével?

2. Határozzuk meg az A szám pozitív egész osztóinak számát, ahol:

$$A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot \sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}}}}.$$

3. Egy sík 20 darab egyenese összesen 187 darab metszéspontot határoz meg. Igazoljuk, hogy az egyenesek között vannak párhuzamosak.

4. Egy t területű derékszögű trapézba az oldalakat érintő r sugarú kör írható, ahol $t = \frac{25}{4} r^2$. Mekkora a trapéz alapjainak aránya?

5. Van 2012 darab számunk $a_1, a_2, \dots, a_{2011}, a_{2012}$ mindegyik $\sqrt{2} + 1$, vagy $\sqrt{2} - 1$. Képezzük a következő összeget:

$$S = a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6 + \dots + a_{2011} a_{2012}.$$

Lehet-e $S = 2012$?