

Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszögben $BAC\angle = 60^\circ$, $ACB\angle = 100^\circ$ és $AB = 4$ cm. Tudjuk még, hogy a BC oldal felezőpontja F , továbbá D az AB oldal olyan pontja, amelyre $BFD\angle = 80^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy $T_{ABC} + 2 \cdot T_{BFD} = \sqrt{24} \text{ cm}^2$, ahol T_{XYZ} az XYZ háromszög területét jelöli.

2. Adjuk meg azt a négy valós számot, melyekre igaz, hogy bármelyikhez hozzáadva a másik három szorzatát, eredményül mindig 10-et kapunk!

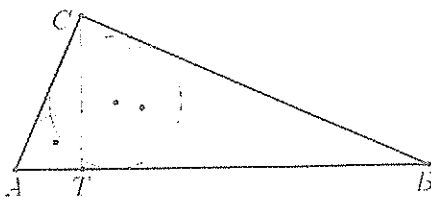
3. Hány olyan 1-nél nagyobb egész szám van, amelyet bármely nála kisebb pozitív egész számmal osztva véges tizedestörtet (vagy egész számot) kapunk eredményül?

Feladatok

1. Mutassuk ki, hogy bármely a , b , c pozitív valós szám esetén, ahol $a + b + c = 1$, igaz a következő állítás:

$$\left(a + \frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4 + \left(b + \frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4 + \left(c + \frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geq 1.$$

2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy A -nál és B -nél is hegyesszöge van. Ekkor állítsunk a C csúcsból merőlegest az AB oldalra, és jelölje a merőleges talppontját T ! Legyen az ATC háromszögbe írt kör sugara r_a , a BTC háromszögbe írt kör sugara r_b , az ABC háromszögbe írt kör sugara r . Bizonyítsuk be, hogy ha $r + r_a + r_b = CT$, akkor a háromszögnek C -nél derékszöge van!



3. Kullancs kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan

- kétharmada félszemű;
- háromnegyede falábú;
- négyötöde kampókezű, és
- öthatoda kopasz.

A hajón a matrózok közül pontosan azok a tisztek, akik egyszerre félszeműek, falábúak, kampókezűek, és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, valamint a tisztek matrózoknak is számítanak!

Hány fős a kalózhajó legénysége?